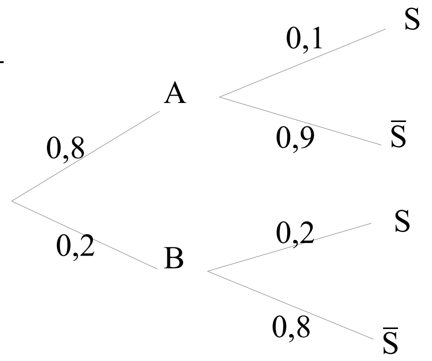
TS – Correction du devoir de vacances

Exercice 1 :

A.1.



A.2.a. $P(B \cap S) = 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}04$ La probabilité de $B \cap S$ est 0,04.

A.2.b. $P(\bar{S}) = P(A \cap \bar{S}) + P(B \cap \bar{S})$

$P(\bar{S}) = 0{,}8 \times 0{,}9 + 0{,}2 \times 0{,}8$

$P(\bar{S}) = 0{,}72 + 0{,}16$ donc $P(\bar{S}) = 0{,}88$

La probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticide est 0,88.

B.1. On répète 10 fois à l'identique une expérience aléatoire à 2 issues dont la probabilité de succès est $p = P(\bar{S}) = 0{,}88$. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de succès parmi les 10 essais. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10;0{,}88)$.

B.2. $P(X=10) = 0{,}88^{10} \approx 0{,}28$.

La probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticide est environ 0,28.

B.3. $P(X \geqslant 8) = P(X=8) + P(X=9) + P(X=10)$

$P(X \geqslant 8) = \binom{10}{8} \times 0{,}88^8 \times 0{,}12^2 + \binom{10}{9} \times 0{,}88^9 \times 0{,}12^1 + 0{,}88^{10}$

$P(X \geqslant 8) = 45 \times 0{,}88^8 \times 0{,}12^2 + 10 \times 0{,}88^9 \times 0{,}12 + 0{,}88^{10}$

$P(X \geqslant 8) \approx 0{,}89$

La probabilité qu'au moins 8 boîtes soient sans trace de pesticide est environ 0,89.

C. $f = \frac{38}{50} = 0{,}76$, fréquence dans l'échantillon de boîtes sans pesticide, I l'intervalle de fluctuation.

k	$P(X \leqslant k)$
38	0,013
$k_1 = 39$	0,032
47	0,948
$k_2 = 48$	0,987

$\leftarrow$ 0,025

$\leftarrow$ 0,975

$I = \left[\frac{k_1}{n} ; \frac{k_2}{n}\right]$

$I = \left[\frac{39}{50} ; \frac{48}{50}\right]$

$I = [0{,}78 ; 0{,}96]$

$f \notin I$ donc l'inspecteur peut décider au seuil de 95 % que la publicité est mensongère.

<u>Exercice 2 :</u>

1. VRAI

x	-3		-1		0		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		↘			-1	↗	

La courbe $\mathcal{C}'$ est en dessous de l'axe des abscisses pour x ∈ **[-3;-1]** donc $f'(x) \leqslant 0$

2. **VRAI**

Sur [-1;2] , la courbe $\mathcal{C}'$ est au dessus de l'axe des abscisses donc $f'(x) \geqslant 0$ alors *f* est croissante.

3. **FAUX.**

D'après le tableau de variations, *f* est strictement croissante sur]-1;2[et $f(0)=-1$
donc pour tout *x* de]-1;2[tel que $x<0$ alors $f(x)<f(0)$ donc $f(x)<-1$ sur]-1;0[.

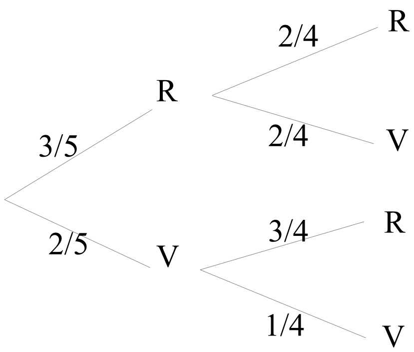
4. **VRAI**

Soit T la tangente à la courbe de *f* au point d'abscisse 0.
T a une équation de la forme $y=f'(0)(x-0)+f(0)$
$f'(0)=1$ d'après la lecture sur $\mathcal{C}'$ et $f(0)=-1$ d'après l'énoncé.
Donc T a pour équation $y=x-1$. Pour $x=1$ alors $y=1-1=0$ donc T passe par A(1;0).

Exercice 3 :

1. **FAUX** On répète 9 fois de façon aléatoire et identique l'expérience aléatoire à 2 issues consistant à regarder si un nombre aléatoire entier entre 1 et 7 est supérieur à 5. La probabilité du succès de cette expérience est $p=\mathrm{P}(\textit{succès})=\dfrac{2}{7}$ (obtenir 6 ou 7)
Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de succès parmi les 9 essais. X suit la loi binomiale $\mathrm{B}\left(9;\dfrac{2}{7}\right)$. $\mathrm{P}(X=3) = \dbinom{9}{3} \times \left(\dfrac{2}{7}\right)^3 \times \left(\dfrac{5}{7}\right)^6 \approx 0{,}26$.

2. **VRAI**



$\mathrm{P}(RR)+\mathrm{P}(VV)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}+\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}=0{,}4$ On gagne 30 €

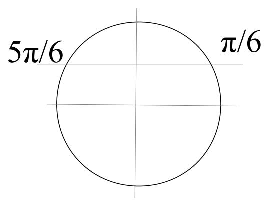
$\mathrm{P}(RV)+\mathrm{P}(VR)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}+\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{4}=0{,}6$ On perd 20 €

$$\mathrm{E}(X)=0{,}4\times30+0{,}6\times(-20)=0$$

3. **VRAI**
A partir de la fonction *f* on calcule $f(1)=0$ et $f'(1)=2$ (fonction nombre dérivé sur la calculatrice)
A partir de la tangente T , si $x=1$ on trouve $y=0$ et le coefficient directeur est 2.
Donc T est bien la tangente à la courbe de *f* au point d'abscisse 1.

4. **FAUX**
Si $x=0$ alors $2\cos(x)=2\cos(0)=2$ et
$\cos(\pi-x)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos(\pi)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1+1=0$
Donc , $x=0$ est un contre exemple.

5. **FAUX**
Dans les solutions il manque $\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$.



6. **VRAI**
D'après la formule donnée, $2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right)-1=\cos\left(\dfrac{2\pi}{8}\right)$

donc $2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=1+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

soit $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. De plus $\pi/8 \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)>0$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}}$ soit $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\dfrac{2}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}}$ d'où $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{4}}$

On retrouve $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Exercice 4 :

A.1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6-(-3)\\-3-0\end{pmatrix}$ Soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}9\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5-(-3)\\4-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$

A.2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=9\times8+(-3)\times4=72-12=60$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=60$

$AB=\sqrt{9^2+(-3)^2}=\sqrt{81+9}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$ $AB=3\sqrt{10}$

$AC=\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$ $AC=4\sqrt{5}$

A.3. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$ Donc $60=12\times5\sqrt{2}\cos(\widehat{BAC})$ ainsi $\cos(\widehat{BAC})=\frac{1}{\sqrt{2}}$

D'où $\cos(\widehat{BAC})=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et puisque $\widehat{BAC}\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ alors $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{4}$.

B.1. Soit $y=mx+p$ l'équation réduite de la droite (AB), $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-3}{9}=\frac{-1}{3}$

$p=y_A-mx_A=0-\left(\frac{-1}{3}\right)\times(-3)=-1$ Donc (AB) a pour équation réduite $y=-\frac{1}{3}x-1$.

Alors une équation cartésienne de (AB) est $x+3y+3=0$.

B.2. (d) est perpendiculaire à (AB) donc elle a pour vecteur normal $\vec{n}=\overrightarrow{AB}$.
Ainsi une équation cartésienne de (d) est $9x-3y+c=0$
(d) passe par C donc $9x_C-3y_C+c=0$ soit $c=-9\times5+3\times4=-33$
Alors une équation cartésienne de (d) est $9x-3y-33=0$ ou encore $3x-y-11=0$.

Autre méthode, pour tout M(x;y) de (d), M $\in$(d) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

M $\in$(d) $\Leftrightarrow$ $(x-5)\times9+(y-4)\times(-3)=0$

M $\in$(d) $\Leftrightarrow$ $9x-45-3y+12=0$

M $\in$(d) $\Leftrightarrow$ $9x-3y-33=0$ M $\in$(d) $\Leftrightarrow$ $3x-y-11=0$

B.3. (d) et (AB) sont perpendiculaires donc sécantes. Soit $\{P(x;y)\}=(d)\cap(AB)$.

$\begin{cases}x+3y+3=0\\3x-y-11=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3y-3\\3(-3y-3)-y-11=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3y-3\\-10y-20=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3y-3\\y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=-2\end{cases}$

donc on retrouve H(3;-2) point d'intersection de (d) et (AB).

B.4. $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}3-5\\-2-4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix}$ et $CH=\sqrt{(-2)^2+(-6)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

Aire de (ABC)= $\frac{AB\times CH}{2}=\frac{3\sqrt{10}\times\sqrt{(-2)^2+(-6)^2}}{2}=\frac{6\times10}{2}=30$.

L'aire du triangle ABC est bien un nombre entier.

C.1. On remplace les coordonnées des points A, B et C dans l'équation du cercle $\mathcal{C}$.

pour A(-3;0), $(-3)^2-4(-3)+0-21=9+12-21=0$
pour B(6;-3), $6^2-4\times6+(-3)^2-21=36-24+9-21=0$
pour C(5;4), $5^2-4\times5+4^2-21=25-20+16-21=0$ donc A, B et C appartiennent à $\mathcal{C}$.

C.2. Equation de cercle : $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=R^2 \Leftrightarrow x-2x\times x_\Omega+x_\Omega^2+y^2-2y\times y_\Omega+y_\Omega^2=R^2$
Donc en identifiant les coefficients de x et de y on trouve $x_\Omega=2$ et $y_\Omega=0$ donc
$x_\Omega^2+y_\Omega^2-R^2=-21$ soit $R^2=25$ donc $R=5$. Cercle de centre Ω(2;0) et de rayon 5.

Exercice 5 :

1. L'image de 0 par *f* est 3 donc $f(0)=3$.
Le coefficient directeur de la tangente en (0;3) à C est 4 donc $f'(0)=4$.

2.a. $f=\frac{u}{v}$ avec $u(x)=3x^2+ax+b$ et $v(x)=x^2+1$.

$f'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u'(x)=6x+a$ et $v'(x)=2x$.

donc $f'(x)=\frac{(6x+a)(x^2+1)-(3x^2+ax+b)(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{6x^3+ax^2+6x+a-6x^3-2ax^2-2bx}{(x^2+1)^2}$

et $f'(x)=\frac{(a-2a)x^2+(6-2b)x+a}{(x^2+1)^2}$ Ainsi $f'(x)=\frac{-ax^2+(6-2b)x+a}{(x^2+1)^2}$.

2.b. $f(0)=3 \Leftrightarrow \frac{3\times 0^2+a\times 0+b}{0^2+1}=3 \Leftrightarrow b=3$

$f'(0)=4 \Leftrightarrow \frac{-a\times 0^2+(6-2\times 3)\times 0+a}{(0^2+1)^2}=4 \Leftrightarrow a=4$.

3. On remarque que l'expression de $f(x)$ correspond bien à $a=4$ et $b=3$.
Donc , en utilisant l'expression de $f'(x)$ de la question 2.a. on a $f'(x)=\frac{-4x^2+4}{(x^2+1)^2}$ soit
$f'(x)=\frac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$. $f'(x)$ s'annule en -1 et 1 . $f(-1)=1$ et $f(1)=5$.

4 et $(x^2+1)^2$ sont toujours strictement positifs donc $f'(x)$ est du signe de $(1-x^2)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	

Exercice 6 :

1. (u_n) est une suite arithmétique de raison 52 car, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1}=u_n+52$
Son 1er terme $u_1=130$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n=u_1+52\times(n-1)$ soit $u_n=130+52(n-1)$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$

$$S_n=130+(130+52)+(130+2\times52)+\ldots+(130+(n-1)\times52)$$

$$S_n=n\times130+52(1+2+\ldots+(n-1))$$

on reconnaît $1+2+3+\ldots+N=\dfrac{N(N+1)}{2}$ avec $N=n-1$

$$S_n=n\times130+52\frac{(n-1)(n-1+1)}{2} \text{ soit } S_n=130n+26(n-1)n=130n+26n^2-26n$$

donc $S_n=26n^2+104n$ ce qu'il fallait trouver.

3. On cherche $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_n \leqslant 116610$
Soit $26n^2+104n-116610 \leqslant 0$ de la forme ax^2+bx+c avec $a=26$, $b=104$ et $c=-116610$.

$\Delta=b^2-4ac=104^2-4\times26\times(-116610)=12132256=3484^2$.

$\Delta>0$ donc il existe deux racines, $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=-69$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=65$.

$a>0$, le polynôme est du signe de a à l'extérieur des racines.

n	1	65	$+\infty$
$S_n-116610$	$-$	0	$+$

On pourra faire un forage de 65 m maximum.

Exercice 7 :

1. Augmenter de 4% revient à multiplier par $1+\frac{4}{100}=1{,}04$.

   Donc tous les ans, $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}=a_n\times 1{,}04$ et de plus $a_0=200$.
   Donc (a_n) est une suite géométrique de raison 1,04 et de 1er terme $a_0=200$.
   $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=a_0\times q^n$ donc $a_n=200\times 1{,}04^n$.

2. $\forall n\in\mathbb{N},\ S_n=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n$
   $S_n=200+200\times 1{,}04+200\times 1{,}04^2+\ldots+200\times 1{,}04^n$.
   $S_n=200(1+1{,}04+1{,}04^2+\ldots 1{,}04^n)$
   On reconnaît $1+q+q^2+\ldots+q^N=\frac{1-q^{N+1}}{1-q}$ avec $q=1{,}04$ et $N=n$.
   $S_n=200\times\frac{1-1{,}04^{n+1}}{1-1{,}04}=\frac{200}{-0{,}04}\times(1-1{,}04^{n+1})$ soit $\forall n\in\mathbb{N},\ S_n=-5000(1-1{,}04^{n+1})$.

3. Tant que $S<3999$
      n prend la valeur $n+1$
      a prend la valeur $a\times 1{,}04$
      S prend la valeur $S+a$
   Fin Tant que
   Afficher n.

4. Variables : n entier, S réel
      n prend la valeur 0
      S prend la valeur 200
   Traitement : Tant que $S<3999$
      n prend la valeur $n+1$
      S prend la valeur $5000\times(1{,}04^{n+1}-1)$
      Fin Tant que
   Sortie : Afficher n.

5. On obtient $n=14$. Vérification $S_{14}\approx 4004{,}7$ et $S_{13}\approx 3658{,}4$.
   A partir de 14 ans, Pierre pourra s'acheter le piano.