CORRECTION DEVOIR D'ENTREE EN 1èreS

Exercice 1:

Voici trois formes d'une même fonction f :

$$f(x)=2(x-2)(x+4)$$
$$f(x)=2(x+1)^2-18$$
$$f(x)=2x^2+4x-16$$

1) Choisir l'expression la mieux adaptée et calculer les antécédents par f de :

a) -18

La forme la plus adaptée pour calculer les antécédents de -18 par f est la forme canonique $f(x)=2(x+1)^2-18$.
On obtient $2(x+1)^2-18=-18$
qui donne $2(x+1)^2=0$
soit $(x+1)^2=0$
donc $x+1=0$
donc $x=-1$
donc l'antécédent de -1 par f est -1.

b) -16

La forme la plus adaptée pour calculer les antécédents de -16 par f est la forme développée $f(x)=2x^2+4x-16$.
On obtient $2x^2+4x-16=-16$
qui donne $2x^2+4x=0$
soit en factorisant par $2x$: $2x(x+2)=0$
en appliquant la règle du produit : $2x=0$ ou $x+2=0$
et donc $x=0$ ou $x=-2$
donc les antécédents de -16 par f sont 0 et -2.

<u>règle du produit</u> :
si $AB=0$
alors $A=0$ *ou* $B=0$

c) 0

La forme la plus adaptée pour calculer les antécédents de 0 par f est la forme factorisée $f(x)=2(x-2)(x+4)$.
On obtient $2(x-2)(x+4)=0$
en appliquant la règle du produit : $x-2=0$ ou $x+4=0$
donc $x=2$ ou $x=-4$
donc les antécédents de 0 par la fonction f sont 2 et -4.

2) Dresser le tableau de variation de f . Quel est le minimum de f ? Pour quel nombre x est-il atteint ?

D'après la forme développée $f(x)=2x^2+4x-16$ on constate que $a=2$
donc a est positif donc la parabole correspondant à cette fonction polynôme de degré 2 est d'abord décroissante puis croissante.
D'autre part d'après la forme canonique $f(x)=2(x+1)^2-18$ on obtient par analogie $\alpha=-1$ et $\beta=-18$ qui correspondent à l'abscisse et l'ordonnée du sommet de la parabole.
Donc le tableau de variation est :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Variations de $f(x)$		↘	- 18	↗	

Le minimum de f est -18 atteint pour $x=-1$.

Exercice 2 :

1) Donner un encadrement de x^2 dans chacun des cas suivants :

a) $-5<x<1$

On considère deux intervalles : positif et négatif :

$-5<x<0$ et $0\leqslant x<1$

on peut maintenant élever au carré :

$(-5)^2>x^2>0^2$ et $0^2\leqslant x^2<1^2$

ce qui donne :

$25>x^2>0$ et $0\leqslant x^2<1$

Attention quand on multiplie ou divise les membres d'une inéquation par un nombre négatif on doit changer le sens des inégalités.

L'intervalle le plus grand est solution donc $x^2<25$

b) $0{,}25\leqslant x<2$

Les deux bornes sont de même signe on peut donc élever directement au carré :

$0{,}25^2\leqslant x^2<2^2$ soit $0{,}0625\leqslant x^2<4$

2) Pour quelles valeurs de x a-t-on :

a) $4\leqslant x^2<16$

Pour trouver les valeurs de x qui répondent aux conditions on peut se servir du tableau de variation de la fonction x^2 :

x	$-\infty$	-4	-2	0	2	4	$+\infty$
variations de x^2		16	4	0	4	16	

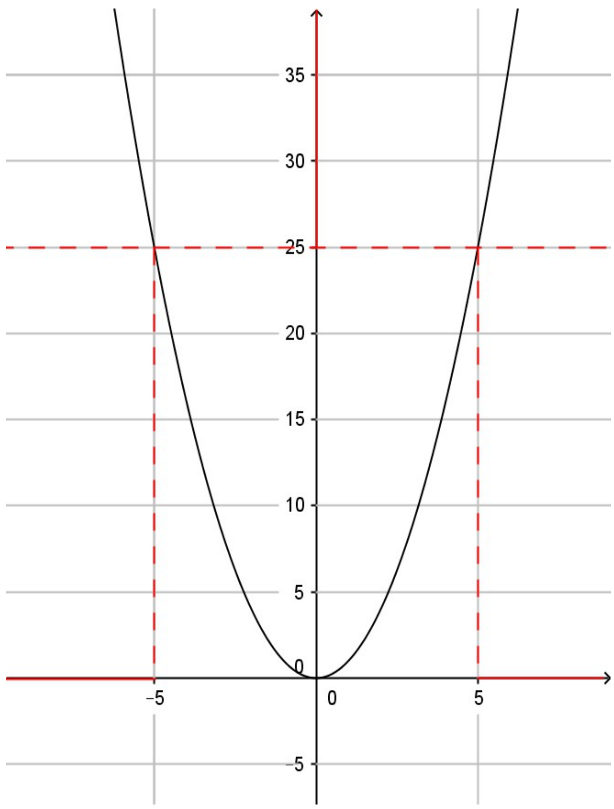
On constate que $4\leqslant x^2<16$ correspond à x $\in$] - 4 ; -2] $\cup$ [2 ; 4[

b) $x^2\geqslant 25$

Pour trouver les valeurs de x qui répondent aux conditions on peut se servir de la représentation graphique de la fonction x^2 :

On constate $x^2\geqslant 25$ correspond à

$\in$] $-\infty$; -5] $\cup$ [5 ; $+\infty$ [



Exercice 3 :

Soit g la fonction définie par $g(x)=\frac{3}{x+8}-\frac{2}{x}$.

1) déterminer l'ensemble de définition de la fonction g .

La fonction g est définie si et seulement si

$x+8\neq 0$ et $x\neq 0$

soit $x\neq -8$ et $x\neq 0$

donc $D_g=\mathbb{R}\setminus\{-8 ; 0\}$

Attention on ne peut pas diviser par 0

2) Écrire $g(x)$ sous la forme d'un unique quotient.

On souhaite donc réduire au même dénominateur soit $x(x+8)$:

$$g(x)=\frac{3\times x}{x(x+8)}-\frac{2\times(x+8)}{x(x+8)}=\frac{3x-2(x+8)}{x(x+8)}=\frac{3x-2x-16}{x(x+8)}=\frac{x-16}{x(x+8)}$$

3) Calculer l'image de -2 par g .

$$g(-2)=\frac{3}{-2+8}-\frac{2}{-2}=\frac{3}{6}+1=0{,}5+1=1{,}5$$

Pour calculer l'image d'un nombre par une fonction on remplace x par ce nombre dans l'expression de la fonction.

Exercice 4 :

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, sa courbe est la droite tracée sur la figure ci-dessous. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2x-3$.

1) Déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de x .

On constate que la représentation graphique de f est une droite donc f est une fonction affine donc de la forme $f(x)=mx+p$ avec m le coefficient directeur de la droite et p l'ordonnée à l'origine.

D'après la représentation graphique l'ordonnée à l'origine est 1 donc $p=1$.

Deux point de la droite sont A(0 ; 1) et B(2 ; 0) donc

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-1}{2-0}=-\frac{1}{2}=-0{,}5$$

Donc $f(x)=-0{,}5x+1$

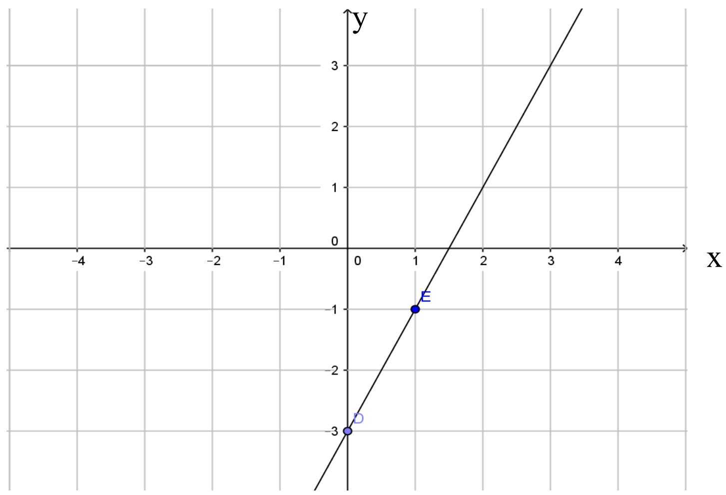
2) Représenter la fonction g sur la figure.

Rappel : pour tracer une droite il suffit de déterminer les coordonnées de deux points de cette droite.

Calculons deux points de la droite représentative de la fonction g .

Pour $x=0$ on a $g(0)=-3$ qui est l'ordonnée à l'origine on a donc D(0;- 3)

et pour $x=1$ on a $g(1)=2\times 1-3=-1$ donc E(1 ; -1)



3) Déterminer par le calcul les nombres $g(\sqrt{3})$ et $g(\frac{3}{2})$ et l'antécédent de 2 par g .

$g(\sqrt{3})=2\times\sqrt{3}-3\approx 0{,}46$
$g(\frac{3}{2})=\frac{2\times 3}{2}-3=3-3=0$

On cherche la valeur de x telle que $g(x)=2$
$g(x)=2=2x-3$
donc $2x=2+3=5$ donc $x=\frac{5}{2}=2{,}5$

4) Étudier le signe de $f(x)$ et de $g(x)$ en fonction de x .
Le coefficient directeur de la droite représentative de $f(x)$ est -0,5 donc négatif donc la fonction est décroissante et elle s'annule pour $x=2$ car

x		2	
Signe de $f(x)$	+	0	-

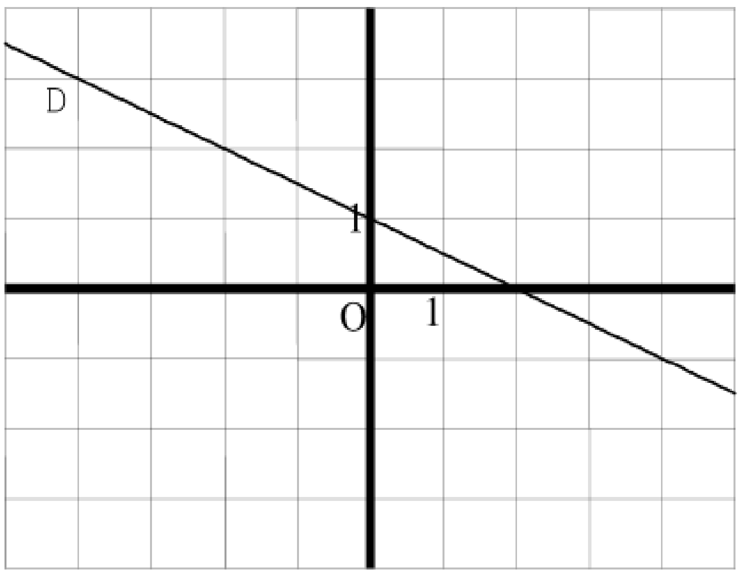
Le coefficient directeur de la droite représentative de $g(x)$ est 2 donc positif donc la fonction est croissante et elle s'annule pour $x=1{,}5$ car $2x-3=0$ donne $2x=3$ soit $x=\frac{3}{2}=1{,}5$

x		1,5	
Signe de $g(x)$	-	0	+

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(2x-3)(-\frac{1}{2}x+1)>0$.
Pour résoudre cette inéquation il faut faire un tableau de signes :

x		1,5		2	
Signe de $f(x)$	+			0	-
Signe de $g(x)$	-	0		+	
Signe de $f(x)\times g(x)$	-	0	+	0	-

Donc S=] 1,5 ; 2[



Exercice 5 :
On considère trois fonctions f, g et h représentées sur la figure ci-dessous sur l'intervalle [-50;50].
En utilisant les courbes répondre aux questions 1) à 5).

1) Déterminer les nombres suivants:

a) le réel $f(20)$
On regarde l'image du nombre 20 par la fonction f (pointillés rouge) on obtient $f(20)=-40$

b) l'image de -20 par h
On regarde l'image du nombre - 20 par la fonction h (pointillés vert) on obtient $h(-20)=-10$

c) le (ou les) antécédent(s) de 40 par f .
Pour $y=40$ (pointillés violets) on obtient $x=-20$ et $x=40$ qui sont les deux antécédents de 40 par f .

2) Dresser sur l'intervalle [-20;20] le tableau de variation de la fonction f .

x	-20		10		20
Variations de $f(x)$	40	$\searrow$	-50	$\nearrow$	-40

3) Résoudre graphiquement les équations ou inéquations suivantes :

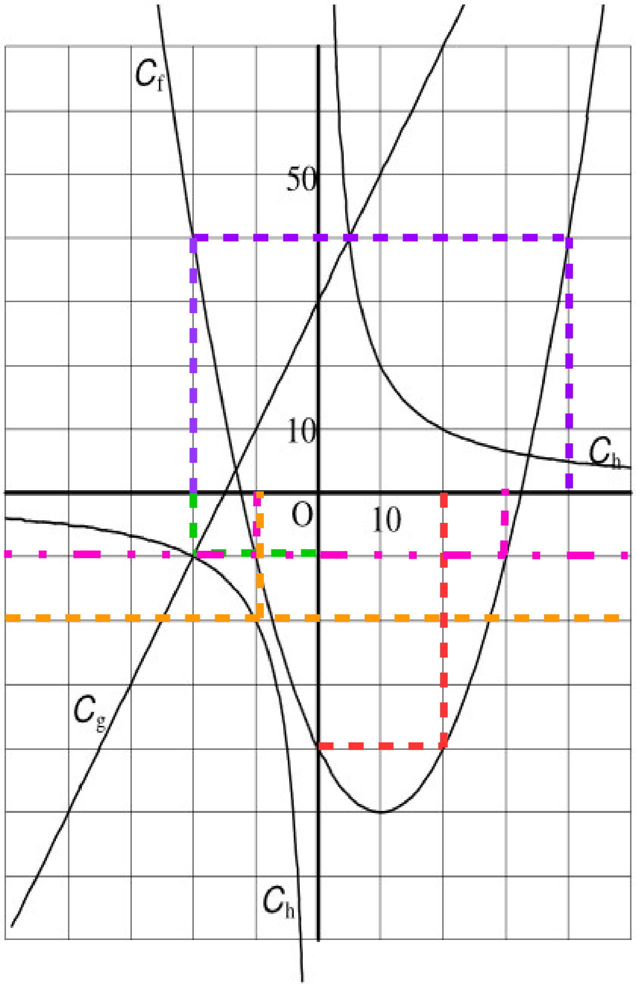
a) $f(x) \leqslant -10$
On trace la droite d'équation $y=-10$ (pointillés rose) et on regarde les abscisses des points de la courbe représentative de $f(x)$ situés en dessous ou sur cette droite.
On obtient S = [-10 ; 30]

b) $h(x)=20$
L'abscisse du point d'intersection de la courbe représentative de la fonction $h(x)$ et de la droite d'équation $y=20$ est 10 donc S = {10}

c) $h(x) \geqslant -20$
On trace la droite d'équation $y=-20$ (pointillés orange) et on regarde les abscisses des points de la courbe représentative de $f(x)$ situés au dessus ou sur cette droite.
On obtient S = [-50 ; -10]$\cup$]0 ; 50]

4) Résoudre graphiquement l'équation $g(x)=h(x)$.
On cherche l'abscisse du ou des points d'intersection des courbes représentatives des fonctions $g(x)$ et $h(x)$ on obtient S= { -20 ; 5}

5) On propose les expressions algébriques suivantes : $A=\frac{200}{x}$, $B=\frac{x^2}{10}-2x-40$ et $C=2x+30$. Elles correspondent dans le désordre aux expressions de $f(x), g(x)$ et $h(x)$ .Associer les formules A, B et C aux fonctions f, g et h .
A correspond à une fonction inverse donc à la fonction $h(x)$
B est une fonction polynôme de degré 2 donc correspond à la fonction $f(x)$ qui est représentée par une parabole.
C est une fonction affine donc correspond à la fonction $g(x)$ qui est représentée par une droite.



6) Calculer à l'aide des expressions de la question 5) :

a) $f(2\sqrt{10})$

$f(x)=\frac{x^2}{10}-2x-40$ donc

$f(2\sqrt{10})=\frac{(2\sqrt{10})^2}{10}-2\times 2\sqrt{10}-40=\frac{4\times 10}{10}-4\sqrt{10}-40=-4\sqrt{10}-36\approx -48{,}65$

b) $f(1+\sqrt{5})$

$f(1+\sqrt{5})=\frac{(1+\sqrt{5})^2}{10}-2\times(1+\sqrt{5})-40=\frac{1+2\sqrt{5}+\sqrt{5}^2}{10}-2-2\sqrt{5}-40=\frac{1}{10}+\frac{2\sqrt{5}}{10}+\frac{5}{10}-42-2\sqrt{5}$

$f(1+\sqrt{5})=0{,}1+0{,}2\sqrt{5}+0{,}5-42-2\sqrt{5}=-41{,}4-1{,}8\sqrt{5}\approx -45{,}42$

c) $h(\frac{4}{3})$.

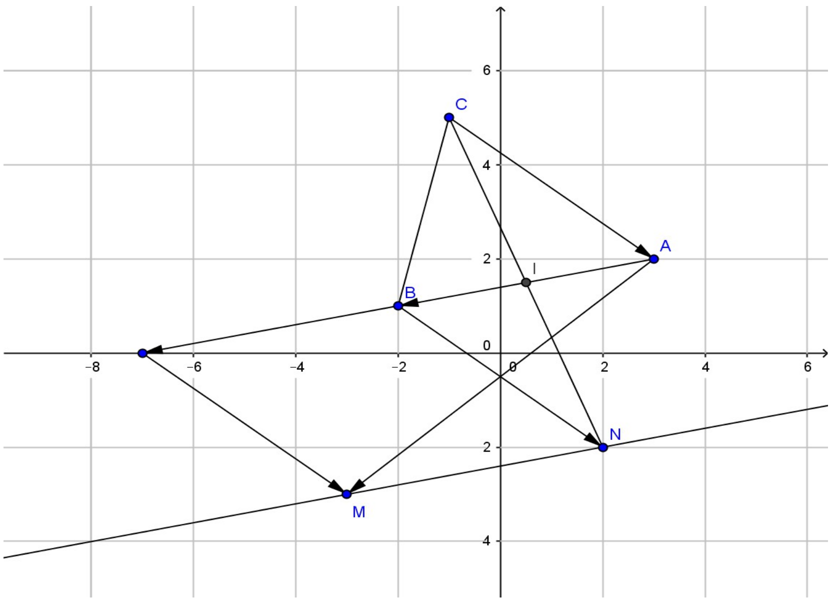
$h(x)=\frac{200}{x}$

$h(\frac{4}{3})=\frac{200}{\frac{4}{3}}=200\times\frac{3}{4}=150$

Exercice 6 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1 cm, on considère les points A(3;2), B(-2;1) et C(-1;5).

1) faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure.



2) Placer le point M défini par : $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.
3) Déterminer par le calcul les coordonnées de M ainsi que du point N tel que $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{CA}$.

Soit (x,y) les coordonnées du point M.

On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

rappel : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2-3\\1-2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}$

De même $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1-3\\5-2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$

Et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y-2\end{pmatrix}$

Or $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ donc $\begin{pmatrix}x-3\\y-2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times(-5)+4\\2\times(-1)-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-5\end{pmatrix}$

donc $\begin{cases}x-3=-6\\y-2=-5\end{cases}$ d'où $\begin{cases}x=-6+3=-3\\y=-5+2=-3\end{cases}$ donc M(-3 ; -3).

De même soit (x,y) les coordonnées du point N.

On a $\overrightarrow{BN}\begin{pmatrix}x+2\\y-1\end{pmatrix}$

Or $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{CA}$ donc $\begin{pmatrix}x+2\\y-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$

donc $\begin{cases}x+2=4\\y-1=-3\end{cases}$ d'où $\begin{cases}x=4-2=2\\y=-3+1=-2\end{cases}$ donc N(2 ; -2).

4) Le triangle ABC est-il rectangle ? (On justifiera la réponse).

Si le triangle ABC est rectangle alors les longueurs de ses côtés vérifient le théorème de Pythagore.
Calculons ces longueurs.

Rappel calcul d'un longueur dans le plan : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

$AB^2=(-2-3)^2+(1-2)^2=(-5)^2+(-1)^2=25+1=26$

$AC^2=(-1-3)^2+(5-2)^2=(-4)^2+3^2=16+9=25$

$BC^2=(-1-(-2))^2+(5-1)^2=1^2+4^2=1+16=17$

On constate que $AB^2=26\neq AC^2+BC^2=17+25=42$
donc le triangle ABC n'est pas rectangle.

5) On appelle I le milieu de [CN]. Démontrer que les droites (AI) et (MN) sont parallèles.

La droite (AI) est confondue avec la droite (AB) car I est le milieu de [AB],
un vecteur directeur de (AB) est $\vec{AB}\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}$.
Calculons $\vec{MN}$ un vecteur directeur de (MN) :
$\vec{MN}\begin{pmatrix}2-(-3)\\-2-(-3)\end{pmatrix}$ soit $\vec{MN}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$
On constate que $\vec{MN}=-\vec{AB}$ donc ces vecteurs sont colinéaires donc les droites (MN) et (AB) sont parallèles.

Exercice 7 :

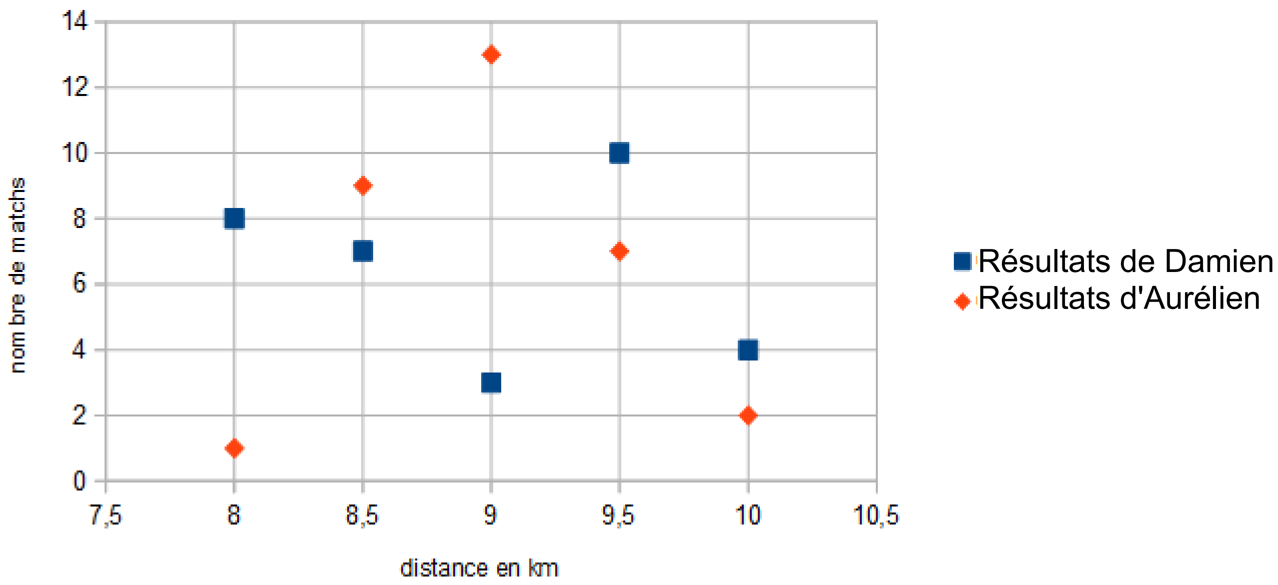
Aurélien et Damien jouent au football. On a relevé les distances parcourues par ces joueurs durant le dernier championnat.
Résultats de Damien :

Distance (en km)	8	8,5	9	9,5	10
Nombre de matchs	8	7	3	10	4

Résultats d'Aurélien :

Distance (en km)	8	8,5	9	9,5	10
Nombre de matchs	1	9	13	7	2

1) Représenter sur un même graphique les nuages de points associés à ces deux tableaux.



2) Calculer la moyenne de chaque joueur. Quel est le meilleur joueur ?

Moyenne de Damien : $\overline{m}_D = \frac{8\times8+8,5\times7+9\times3+9,5\times10+10\times4}{8+7+3+10+4} = \frac{285,5}{32} \approx 8,92$

Moyenne d'Aurélien : $\overline{m}_A = \frac{8\times1+8,5\times9+9\times13+9,5\times7+10\times2}{8+7+3+10+4} = \frac{288}{32} = 9$

Le joueur qui court le plus en moyenne est Aurélien.

3) Calculer l'écart interquartile. Quel est le joueur le plus régulier ?

Pour Damien :
Traçons le tableau des effectifs cumulés croissants :

Distance (en km)	8	8,5	9	9,5	10
Nombre de matchs cumulés croissants	8	15	23	30	32

L'effectif total est 32 = N

On calcule $\frac{N}{4} = \frac{32}{4} = 8$ donc Q1 = 8

De même on calcule $\frac{3N}{4} = \frac{3\times32}{4} = 24$ donc Q3=9,5

donc l'écart interquartile de Damien est $\Delta_D = 9,5-8 = 1,5$

Pour Aurélien :
Traçons le tableau des effectifs cumulés croissants :

Distance (en km)	8	8,5	9	9,5	10
Nombre de matchs cumulés croissants	1	10	18	28	32

L'effectif total est 32 = N

On calcule $\frac{N}{4} = \frac{32}{4} = 8$ donc Q1 = 8,5

De même on calcule $\frac{3N}{4} = \frac{3\times32}{4} = 24$ donc Q3=9,5

donc l'écart interquartile de Damien est $\Delta_A = 9,5-8,5 = 1$

L'écart interquartile le plus faible est celui d'Aurélien c'est donc le joueur le plus régulier.

Exercice 8:

Dans une célèbre école du nom de Poudlard, les élèves sont répartis dans quatre »maisons » nommées : Gryffondor, Poufsouffle, Serdaigle et Serpentard.
La répartition des 2500 élèves est la suivante :

Gryffondor	Poufsouffle	Serdaigle	Serpentard
675	624	626	575

Drago, l'un des représentants de la maison Serpentard, veut se plaindre au directeur de cette école car, selon lui, le choix du nombre d'élèves par maison n'a pu se faire de façon aléatoire et il se sent lésé .
A-t-il raison de se plaindre ?

La proportion d'être choisi au hasard par une équipe parmi les quatre est $p=\frac{1}{4}$

Il y a $n=2500$ élèves en tout.

Les conditions sont respectées : $0{,}2\leqslant p\leqslant 0{,}8$ et $n\geqslant 25$ pour que l'on calcule l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% associé au choix d'une école

$$I_f=[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;p+\frac{1}{\sqrt{n}}]$$

soit $I_f=[0{,}25-\frac{1}{\sqrt{2500}}\,;0{,}25+\frac{1}{\sqrt{2500}}]=[0{,}23\ ;0{,}27]$

Calculons la fréquence associée à chacune des quatre écoles :

Serpentard : $f_s=\frac{575}{2500}=0{,}23$

Gryffondor : $f_g=\frac{675}{2500}=0{,}27$

Poufsouffle : $f_p=\frac{624}{2500}=0{,}2496$

Serdaigle : $f_{se}=\frac{626}{2500}=0{,}2504$

Ces quatre fréquences sont comprises dans l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % associé à l'expérience donc l'hypothèse sur la proportion ($p=\frac{1}{4}$) ne peut pas être rejetée et donc Serpentard a tort de se plaindre.