CORRECTION Devoir de rentrée 2nde

Calculs fractionnaires : Calculer et donner le résultat sous forme simplifiée

$$A=\frac{5}{7}\times\left(\frac{7}{6}-\frac{1}{18}\right)$$ *priorité au calcul entre parenthèses*

$$A=\frac{5}{7}\times\left(\frac{7\times3}{6\times3}-\frac{1}{18}\right)$$ *mise au même dénominateur des termes de la différence*

$$A=\frac{5}{7}\times\left(\frac{21}{18}-\frac{1}{18}\right)$$ $$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{d}$$

$$A=\frac{5}{7}\times\frac{20}{18}$$

$$A=\frac{5}{7}\times\frac{10}{9}$$ *simplification de* $\frac{20}{18}$ $$\frac{a}{b}=\frac{a:k}{b:k}$$

$$A=\frac{50}{63}$$ $$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

$$B=\frac{3}{5}-\left(\frac{1}{14}:\frac{5}{28}\right)$$ rappel : $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}$

$$B=\frac{3}{5}-\frac{1}{14}\times\frac{28}{5}$$ *<u>Remarque :</u> les parenthèses ne sont pas nécessaires car la multiplication (et division) est prioritaire sur la soustraction.*

$$B=\frac{3}{5}-\frac{1}{14}\times\frac{14\times2}{5}$$

$$B=\frac{3}{5}-\frac{1\times14\times2}{14\times5}$$ *simplification par 14*

$$B=\frac{3}{5}-\frac{2}{5}$$

$$B=\frac{1}{5}$$ $$\frac{a}{d}-\frac{b}{d}=\frac{a-b}{d}$$

$$C=\frac{-5}{3-\frac{7}{3}}$$

$$C=\frac{-5}{\frac{3\times3}{3}-\frac{7}{3}}$$

$$C=\frac{-5}{\frac{9-7}{3}}$$

$C=\dfrac{-5}{\dfrac{2}{3}}$

$C=-5\times\dfrac{3}{2}$ *diviser par un nombre non nul revient à multiplier par son inverse* $\dfrac{a}{\left(\dfrac{b}{c}\right)}=a\times\dfrac{c}{b}$

$C=\dfrac{-15}{2}=-7{,}5$

Puissance de 10 : Écrire chaque expression sous la forme a^n où a et n sont des entiers relatifs

$D=\dfrac{7^{-1}}{(7^{-3})^2}$ rappel $a^b\times a^c=a^{b+c}$, $(a^b)^c=a^{bc}$, $\dfrac{a^b}{a^c}=a^{b-c}$

$D=\dfrac{7^{-1}}{(7^{-3})^2}=\dfrac{7^{-1}}{7^{-3\times2}}=\dfrac{7^{-1}}{7^{-6}}=7^{-1-(-6)}=7^{-1+6}=7^5$

$E=\dfrac{10^{-20}\times10^{-3}}{10^2}$ donne $E=\dfrac{10^{-20}\times10^{-3}}{10^2}=\dfrac{10^{-20-3}}{10^2}=\dfrac{10^{-23}}{10^2}=10^{-23-2}=10^{-25}$

Résoudre une équation :

a) $15x+12=-25x-35$

En ajoutant $25x$ et en soustrayant 12 on obtient : $15x+25x=-35-12$

On simplifie chaque membre $40x=-47$

On divise par 40 $x=-\dfrac{47}{40}=-1{,}175$

L'équation a une seule solution $\dfrac{-47}{40}$

b) $5(2x-8)-\dfrac{4}{3}=-2\left(x-\dfrac{1}{3}\right)+4$

On développe $5\times2x-5\times8-\dfrac{4}{3}=-2\times x-2\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)+4$

$10x-40-\dfrac{4}{3}=-2x+\dfrac{2}{3}+4$

On regroupe les terme en x d'un côté et les termes constants de l'autre :

$10x+2x=\dfrac{2}{3}+4+40+\dfrac{4}{3}$

On simplifie $12x=46$ car $44+\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3}=44+\dfrac{6}{3}=44+2=46$

$x=\dfrac{46}{12}=\dfrac{23}{6}$

L'équation a une seule solution $\dfrac{23}{6}$

Résoudre une équation produit :

a) $2x(-7x+4)=0$

On sait que $A\times B=0$ si, et seulement si, $A=0$ ou $B=0$

Donc ici cela donne $2x=0$ ou $-7x+4=0$

$x=0$ ou $-7x=-4$

qui donne $x=0$ ou $x=\frac{-4}{-7}=\frac{4}{7}$

L'équation a une deux solutions 0 et $\frac{4}{7}$ **.**

b) $(-3x+7)(8x+9)=0$

De la même manière qu'au a) 'équation équivaut à :

$-3x+7=0$ ou $8x+9=0$

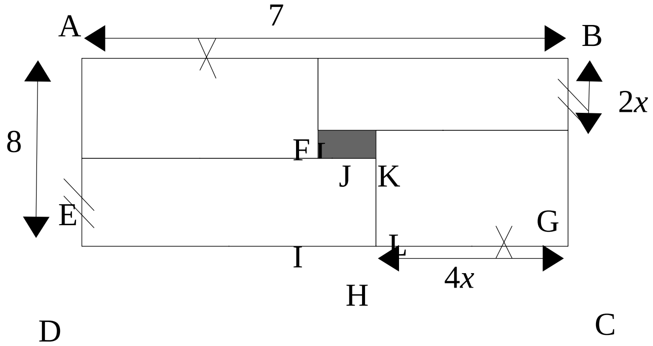
$-3x=-7$ ou $8x=-9$

qui donne $x=\frac{-7}{-3}=\frac{7}{3}$ ou $x=\frac{-9}{8}$

L'équation a une deux solutions $\frac{7}{3}$ **et** $-\frac{9}{8}$.

c) Montrer que l'aire du petit rectangle grisé est $(8-4x)(7-8x)$.

Pour quelle(s) valeurs de x l'aire grisée est-elle nulle ?



- $A_{JKLI}=JK\times KL=(7-8x)\times(8-4x)$

Rajoutons les points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L à la figure

Les quadrilatères ABCD, AFIE, FBGJ, LGCH et DHLE sont des rectangles.
Le codage de la figure nous indique d'autre part que
ED = BG = $2x$ et AF = HC = $4x$

Or AB = DC = 7 et AD = BC = 8
Donc FB= DH = $7-4x$ et AE = GC = $8-2x$

D'après le dessin $AB=AF+JK+KG$ donc $JK=AB-AF-KG$
or $KG=HC=4x$ donc $JK=7-4x-4x=7-8x$

De même $BC=BG+KL+LH$ donc $KL=BC-BG-LH$
or $LH=ED=2x$ donc $KL=8-2x-2x=8-4x$

Rappel : aire d'un rectangle : longueur x largeur

Donc : $A_{JKLI}=JK\times KL=(7-8x)\times(8-4x)$

▪ On veut que cette aire soit nulle, on est donc amené à résoudre l'équation $(7-8x)\times(8-4x)=0$
qui est une équation produit nul.

$$(7-8x)\times(8-4x)=0$$

$$7-8x=0 \quad \text{ou} \quad 8-4x=0$$

$$-8x=-7 \quad \text{ou} \quad -4x=-8$$

$$x=\frac{-7}{-8}=\frac{7}{8} \quad \text{ou} \quad x=\frac{-8}{-4}=\frac{8}{4}=2$$

donc les deux valeurs de x pour lesquelles il n'y a aucun rectangle grisé sont $x=\frac{7}{8}$ et $x=2$.

Or la solution $x=2$ ne convient pas car alors $4x>7$. Seule la solution $x=\frac{7}{8}$ est acceptée.

Résoudre une inéquation et représenter sur une droite les solutions :

a) $3(x-2)+4<4x-2$

On commence par développer : $3x-6+4<4x-2$ et simplifier : $3x-2<4x-2$

Puis on regroupe ous les termes en x d'un côté de l'inéquation et tous les termes constants (sans) de l'autre :

$3x-4x<-2-(-2)$ soit $-x<0$.

On multiplie les deux côtés de l'inégalité par (-1) et donc on change le sens de l'inégalité : $x>0$.

Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres strictement positifs.

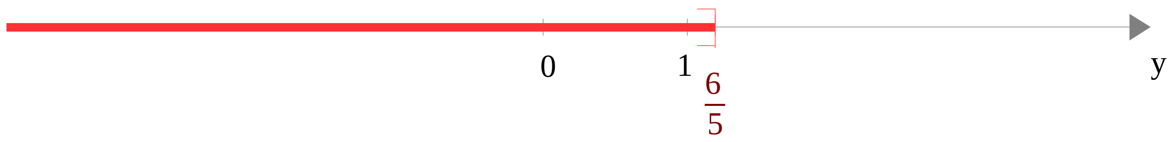
b) $1-8y \geqslant -17+7y$

$1+17 \geqslant 7y+8y$

$18 \geqslant 15y$ on divise par 15 qui est un nombre positif donc $\frac{18}{15} \geqslant y$

donc $\frac{3\times6}{3\times5} \geqslant y$ donc $y \leqslant \frac{6}{5}$

Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres inférieurs ou égaux à $\frac{6}{5}$



c) Raoul achète 2 croissants et 1 brioche chaque jour pendant 5 jours, il dépensera ainsi moins du double du prix de 3 croissants et 4 brioches. Sachant que la brioche coûte 0,95 €, quels sont les prix possibles d'un croissant ?

On cherche le prix possible d'un croissant, appelons x ce prix.
La phrase « Raoul achète 2 croissants et 1 brioche chaque jour pendant 5 jours » se traduit en formule par $(2\times x+1\times0{,}95)\times5$ car le prix d'une brioche est 0,95 €.
La phrase « le double du prix de 3 croissants et 4 brioches » se traduit en formule par $2\times(3\times x+4\times0{,}95)$

« Il dépensera moins.... » nous donne l'inéquation : $(2\times x+1\times0{,}95)\times5<2\times(3\times x+4\times0{,}95)$
ce qui donne $(2x+0{,}95)\times5<2\times(3x+3{,}8)$
soit en développant : $10x+4{,}75<6x+7{,}6$
en passant les termes en x du même côté : $10x-6x<7{,}6-4{,}75$
donc $4x<2{,}85$
puis en divisant par 4 qui est positif $x<\frac{2{,}85}{4}$ soit $x<0{,}7125$

N'importe quel prix entre 0 et 0,71 € est possible.

Développer et réduire les expressions suivantes :

$A=x(2x+1)$
On distribue le x à tous les termes de la parenthèse soit : $A=x\times2x+x\times1=2x^2+x$

$B=(\frac{2}{3}-y)(3-\frac{y}{4})$

On applique la double distributivité : $B=\frac{2}{3}\times3+\frac{2}{3}\times(-\frac{y}{4})-y\times3-y\times(-\frac{y}{4})$

soit :

$$B=2-\frac{y}{3\times2}-3y+\frac{y^2}{4}=2-\frac{y}{6}-3y+\frac{y^2}{4}=2-\frac{y}{6}-\frac{3\times6y}{6}+\frac{y^2}{4}=2+\frac{-y-18y}{6}+\frac{y^2}{4}=2-\frac{19}{6}y+\frac{y^2}{4}$$

$$B=\frac{y^2}{4}-\frac{19}{6}y+2$$

$C=(2y-3)^2$

On applique l'identité remarquable $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$:

$C=(2y)^2-2\times2y\times3+3^2=2^2\times y^2-12y+9=4y^2-12y+9$

$D=3a-(a+1)(a-1)$

On reconnaît l'identité remarquable $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$:

$D=3a-(a^2-1^2)=3a-a^2+1$

Factoriser les expressions suivantes :

$E=x\underline{(x+2)}+3\underline{(x+2)}$

On constate qu'il y a le terme $(x+2)$ dans chacun des deux termes de la somme donc on factorise par $(x+2)$:

$E=(x+2)\times(x+3)=(x+2)(x+3)$

$F=(1-2z)(z+1)-(1-2z)^2$

On peut réécrire l'équation de façon à faire apparaître le terme $(1-2z)$ dans chacun des termes de la somme :

$F=\underline{(1-2z)}(z+1)-\underline{(1-2z)}(1-2z)$

Factorisons par $(1-2z)$: $F=(1-2z)\times((z+1)-(1-2z))$

Développons la deuxième parenthèse puis simplifions : $F=(1-2z)\times(z+1-1+2z)$

puis simplifions : $F=(1-2z)\times(3z)=3z(1-2z)$

$G=16a^2-9b^2$

On reconnaît l'identité remarquable $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$:

$G=(4a)^2-(3b)^2=(4a-3b)(4a+3b)$

$H=k^2+25-10k$

$H=k^2-10k+25$

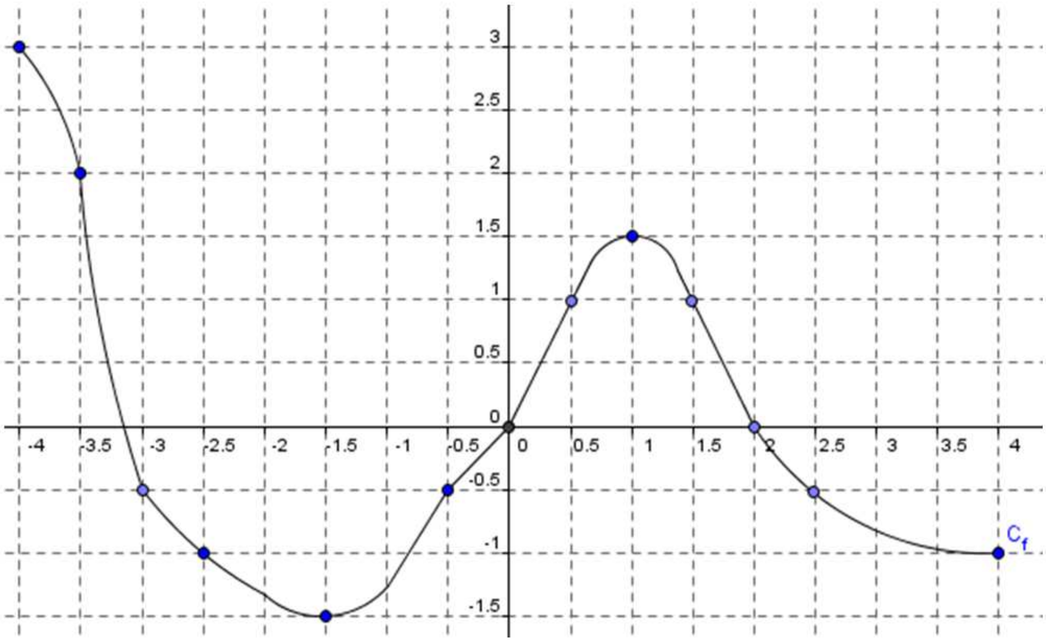
On reconnaît l'identité remarquable $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$:

$H=k^2-2\times5\times x+5^2$

$H=(k-5)^2$

Fonctions

<u>Exercice 1 :</u>



Soit f la fonction dont la courbe représentative dans un repère est donnée ci-dessus.

1) Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes :

a) L'image de 1 est 1,5. On note aussi $f(1) = 1,5$.

b) 1 a trois antécédents par f : -3,4 (environ) ; 0,5 et 1,5.

c) $f(2) = 0$ $f(0) = 0$

d) Résoudre $f(x) = -0,5$ revient à cherche les nombres qui ont pour image -0,5 par f.
Autrement dit, cela revient à déterminer les antécédents de -0,5.

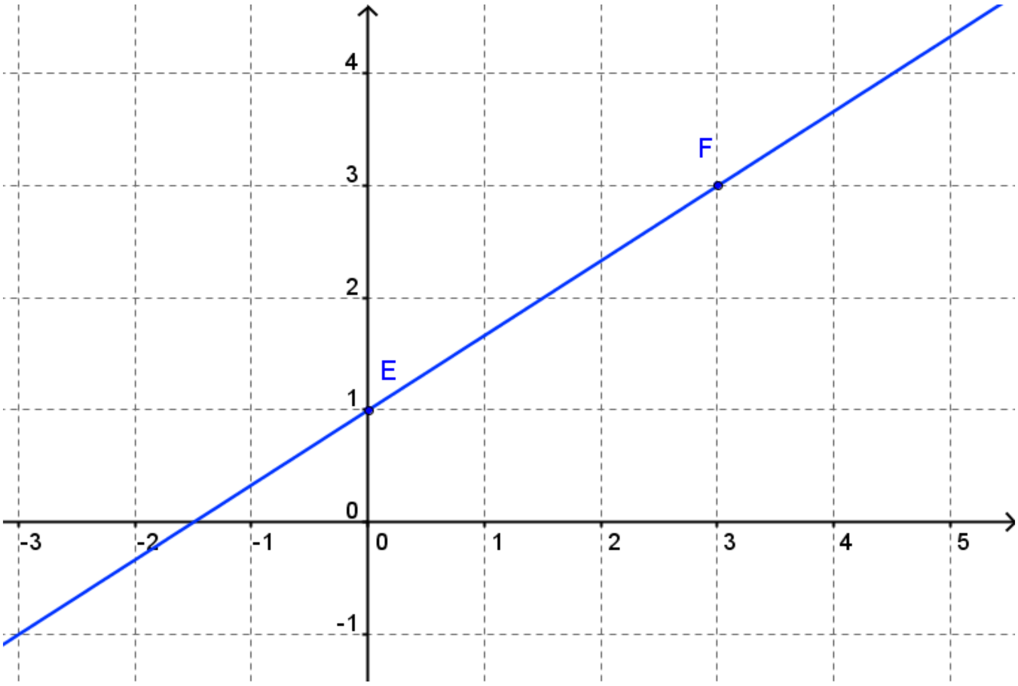
L'équation $f(x) = -0,5$ a trois solutions : -3 ; -0,5 et 2,5

2) Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{2}{3}x + 1$.
On appelle (d) la droite qui représente cette fonction affine.

a) Tracer (d) avec précision.

x *(on choisit 2 valeurs)*	0	3
$g(x) = \frac{2}{3}x + 1$	$g(0) = \frac{2}{3}\times 0 + 1$	$g(0) = \frac{2}{3}\times 3 + 1 = 3$

La droite (d) passe par les points E(0 ; 1) et F(3 ; 3).



b) Le point A(33 ; 24) appartient-il à (*d*) ? Justifier la réponse.

Solution : g(33) = $\frac{2}{3} \times 33 + 1 = 22 + 1 = 23$

g(33) n'est pas égal à 24 donc le point A(33 ; 24) n'appartient pas à (d).

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$.

En détaillant les calculs, montrer que :

$f(5) = 26$ $\qquad f(-10) = 251$ $\qquad f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-13}{9}$

- $f(5) = 2\times(5)^2 - 5\times(5) + 1$. Mieux vaut, dans un premier temps, remplacer *x* par sa valeur en mettant des parenthèses (elles sont souvent indispensables).

$f(5) = 2\times 25 - 5\times 5 + 1$ Le carré est prioritaire sur la multiplication.

$f(5) = 50 - 25 + 1$ La multiplication est prioritaire sur les addition et soustractions.

$\boldsymbol{f(5) = 26}$

- $f(5) = 2\times(-10)^2 - 5\times(-10) + 1$. Les parenthèses sont indispensables.

$f(5) = 2\times 100 - 5\times(-10) + 1$ Le carré est prioritaire sur la multiplication et $(-10)^2 = (-10)\times(-10) = 100$

$f(5) = 200 - (-50) + 1$ La multiplication est prioritaire sur les additions et soustractions.

$f(5) = 200 + 50 + 1$

$\boldsymbol{f(5) = 251}$

- $f\left(\frac{2}{3}\right) = 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 5\times\left(\frac{2}{3}\right) + 1$ Les parenthèses sont indispensables.

$f\left(\frac{2}{3}\right) = 2\times\left(\frac{4}{9}\right) - 5\times\left(\frac{2}{3}\right) + 1$ Le carré est prioritaire sur la multiplication et $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{9} - \frac{10}{3} + 1$ La multiplication est prioritaire et $a\times\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{a\times b}{c}$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{9} - \frac{30}{9} + \frac{9}{9}$ « Mise au même dénominateur »

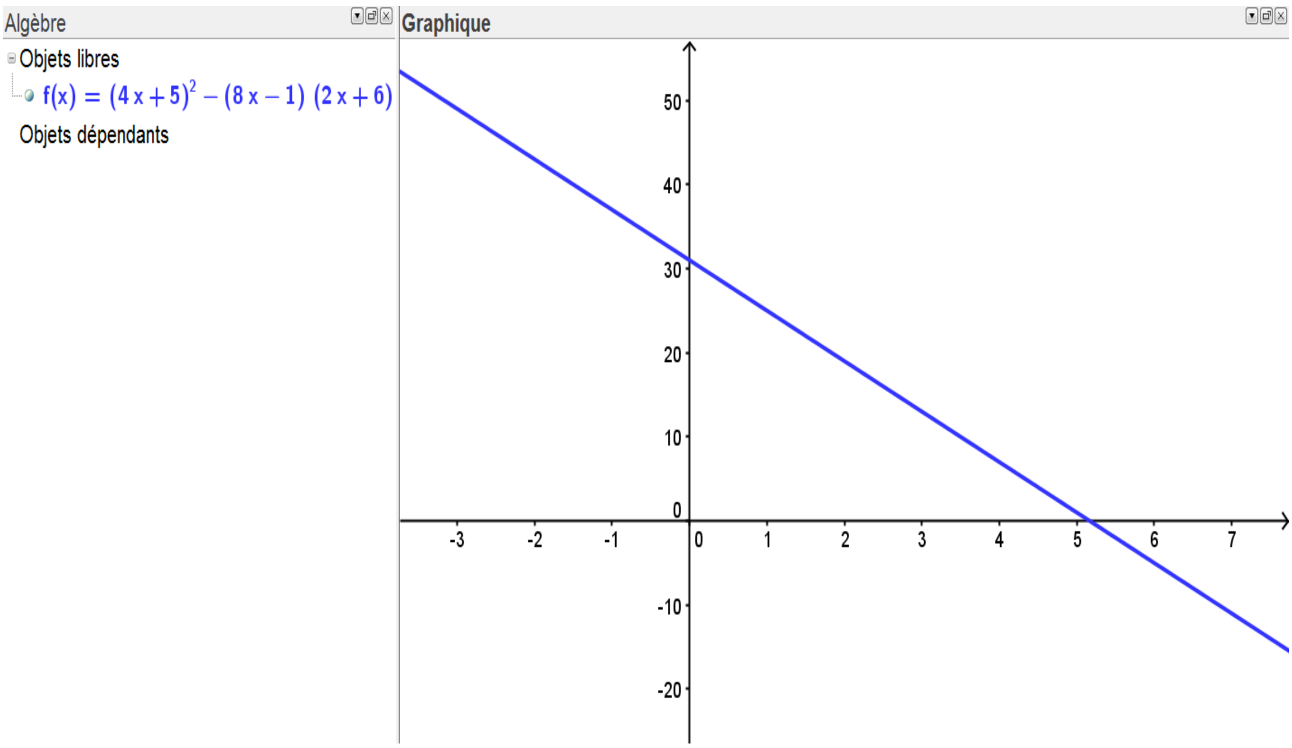
$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8-30+9}{9}$ $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-13}{9}$

Exercice 3 :

On a tracé, à l'aide d'un logiciel de géométrie, la courbe représentative de la fonction *f* définie par $f(x) = (4x+5)^2 - (8x-1)(2x+6)$.

On donne ci-dessous un copie d'écran :



1)Au vu de cet affichage, quelle conjecture peut-on faire concernant la nature de la fonction *f* ?

La courbe affichée semble être une droite. La fonction *f* semble donc être affine.

2) Démontrer cette conjecture.

Essayons de simplifier l'équation de f

$$f(x)=(4x+5)^2-(8x-1)(2x+6)$$

En utilisant l'identité remarquable $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ et la double distributivité il vient :

$$f(x)=(4x)^2+2\times 4x\times 5+5^2-(8x\times 2x+8x\times 6-1\times 2x-1\times 6)$$

donc $f(x)=16x^2+40x+25-(16x^2+48x-2x-6)=16x^2+40x+25-16x^2-48x+2x+6$

donc $f(x)=31-6x$ $f(x) = -6x + 31$.

$f(x)$ est de la forme $ax + b$ avec $a = -6$ et $b = 31$.

La fonction f est bien une fonction affine. Sa représentation graphique est donc une droite.

<u>Exercice 4 :</u>

Il existe plusieurs unités de température. Par exemple, dans nos contrées, nous utilisons le degré Celsius (noté °C) alors que les pays anglo-saxons préfèrent le degré Fahrenheit (noté °F).

Ainsi, pour un français, l'eau gèle à 0°C alors que pour un anglais c'est à 32°F.
Il s'agit bien sûr de ma même température mais mesurée dans deux unités différentes.

De même, la température d'ébullition de l'eau est 100°C c'est à dire 212°F.

Si on note x la mesure en degré Celsius et y la mesure en degré Fahrenheit d'une même température, alors on sait que la formule qui permet de faire la conversion est du type $y = ax + b$.

1) <u>Conversions à l'aide d'un graphique :</u>

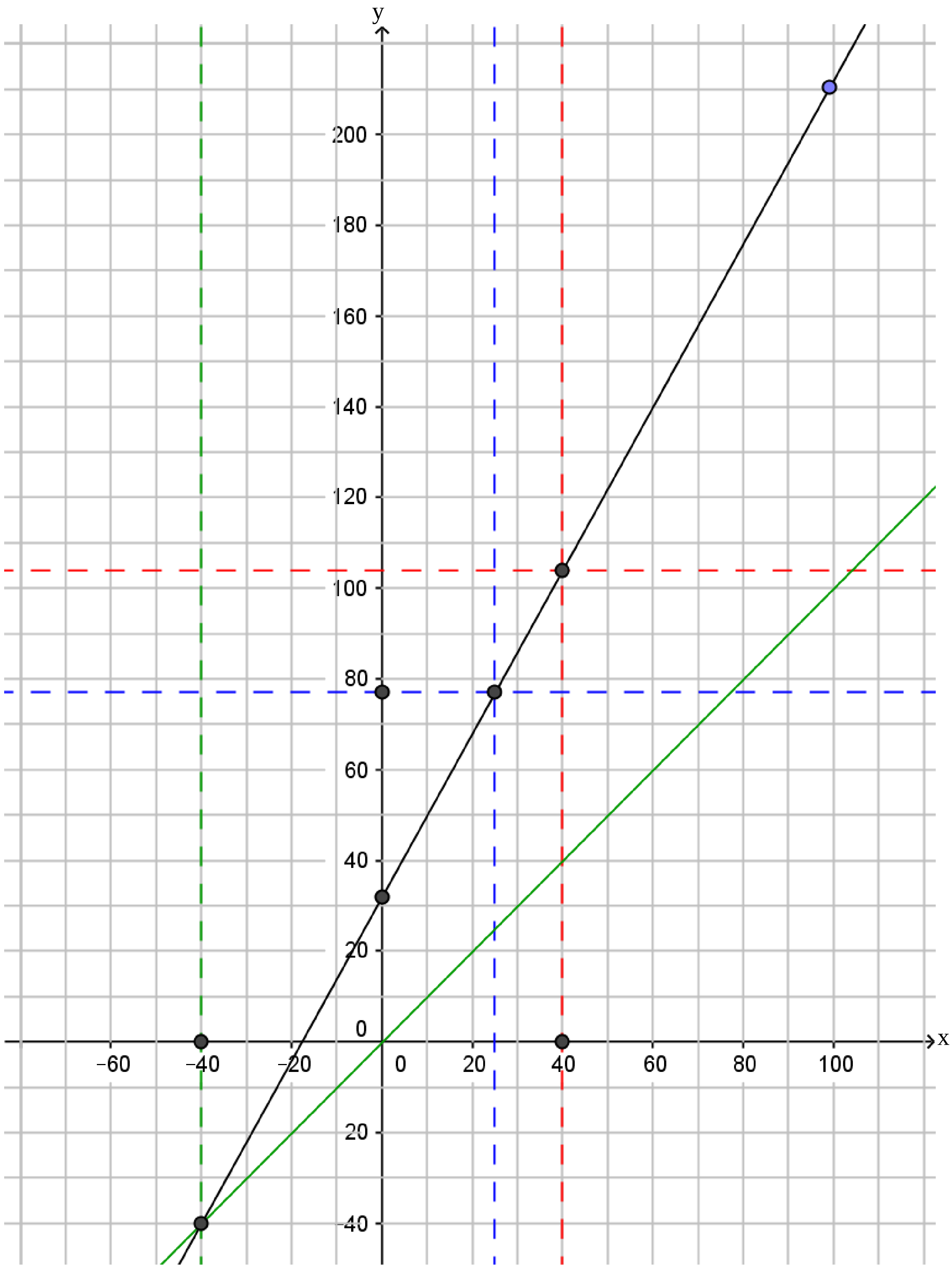
a) L'équation $y = ax + b$ est celle d'une droite.

Tracer cette droite dans un repère, sur papier, en utilisant les deux données concernant les températures de solidification et d'ébullition de l'eau.

On utilisera les échelles suivantes : - axe des abscisses : 1 cm pour 10°C
- axe des ordonnées : 1 cm pour 10°F.

On travaillera sur papier millimétré en plaçant l'origine du repère de façon que la -50 apparaisse sur les deux axes.

Pour tracer une droite, il suffit de positionner deux points de cette droite, soit ici les points de coordonnées (0 ;32) et (100 ; 212).



b) En utilisant le graphique convertir : 25°C en Fahrenheit
104° F en Celsius,

D'après le graphique 25°C correspond à 77 °F (droites bleu)
104°F correspond à 40°C (droites rouge).

x

c) Il existe une température dont les mesures en °C et en °F soient égales,
Quelle est cette température ?

Cette température est telle que $y=x$.

On trace cette droite (droite verte) sur le graphique et on obtient $y=x=-40°C=-40°K$

2) Conversions par le calcul

a) Sachant que l'eau gèle à 0°C c'est à dire 32°F et qu'elle bout à 100°C soit 212°F, déterminer *a* et *b*.

Pour $x=0$ on a $y=32$ donc $y=ax+b$ devient $32=a\times 0+b=b$

Pour $x=100$ on a $y=212$ donc on a $212=a\times 100+32$ donc $212-32=100a$
donc $100a=180$ soit $a=\frac{180}{100}=1{,}8$.
Donc $a=1{,}8$ et $b=32$.

b) On admettra que la formule cherchée est $y = 1{,}8x + 32$.
-convertir, par le calcul, 25°C en Fahrenheit.

Pour $x=25$ on a $y=1{,}8\times 25+32=45+32=77$ donc 25°C correspond à 77 °F.

- la température d'inflammation du papier est 451°F. Convertir en °C.

Pour $y=451$ on a $451=1{,}8x+32$ donc $1{,}8x=451-32=419$

donc $x=\frac{419}{1{,}8}\approx 232{,}8$ donc 419°F correspond à peut près à 233 °C.

–chercher la température qui est mesurée par le même nombre dans les deux unités revient à chercher x tel que $y=1{,}8x + 32$ soit égal à x. Résoudre cette équation et donner cette température.

On cherche à résoudre l'équation $1{,}8x+32=x$
on regroupe les termes en x du même côté de l'équation : $1{,}8x-x=-32$

d'où $0{,}8x=-32$

$$x=-\frac{32}{0{,}8}=-40$$

Cette température est donc -40 °C soit -40 °K