DEVOIR DE VACANCE TS

EXERCICE 1

Partie A

Un grossiste achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs. Il achète 80% de ses boîtes chez le fournisseur A et 20% chez le fournisseur B.
10% des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20% de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.
On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les évènements suivants :

– évènement A : « la boîte provient du fournisseur A »;
– évènement B : « la boîte provient du fournisseur B»;
– évènement S : « la boîte présente des traces de pesticides»

1) Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.
2) a) Quelle est la probabilité de l'évènement $B \cap S$?
   b) Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à 0,88.

Partie B

Le gérant d'un salon de thé achète 10 boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui associe à ce prélèvement de 10 boîtes, le nombre de boîtes sans trace de pesticides. Les probabilités demandées seront arrondies au centième.

1) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2) Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.
3) Calculer la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.

Partie C

À des fins publicitaires, le grossiste affiche sur ses plaquettes : « 88% de notre thé est garanti sans trace de pesticides ».
Un inspecteur de la brigade de répression des fraudes souhaite étudier la validité de l'affirmation.
À cette fin, il prélève 50 boîtes au hasard dans le stock du grossiste et en trouve 12 avec des traces de pesticides et donc 38 sans.

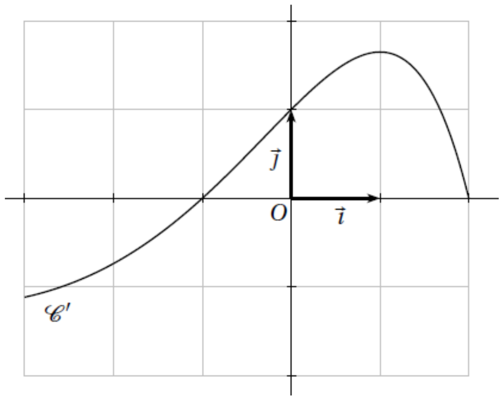
L'inspecteur peut-il décider, au seuil de 95%, que la publicité est mensongère ?

Pour argumenter la réponse, on utilisera un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.

Exercice 2 : ***Vrai ou faux ?***

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$).
On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle [-3 ; 2].
On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathscr{C}'$ ci-dessous :



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

On pourra déterminer l'abord le tableau de variation de f.

1) Pour tout réel x de l'intervalle [-3 ; -1], $f'(x) \leq 0$.

2) La fonction f est croissante sur l'intervalle [-1 ; 2].

3) Pour tout réel x de l'intervalle [-3 ; 2], $f(x) \geq -1$.

4) Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées A(1 ; 0).

Exercice 3 ***Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse***

Les cinq questions sont indépendantes.

1)

```
A et C sont des entiers naturels,
C prend la valeur 0
Répéter 9 fois
        A prend une valeur aléatoire entière entre 1 et 7.
                Si A > 5 alors C prend la valeur de C + 1
                Fin Si
Fin répéter
Afficher C.
```

On exécute l'algorithme ci-dessous.

Affirmation n°1 « La probabilité, arrondie au centième, qu'il affiche 3 est 0,21 . »

2) Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher : 3 rouges et 2 vertes.
La règle du jeu est la suivante :

– Le joueur pioche une boule puis une deuxième <u>sans remettre</u> la première.
– Si les deux boules ont la même couleur alors il en poche 30 €, sinon il perd 20 €.

Affirmation n°2 « Le jeu est équitable (autrement dit, l'espérance de gain est nulle). »

3) Soient f la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

Affirmation n°3 : « La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = 2x - 2$. »

4) ***Affirmation n°4 :*** Quel que soit le nombre réel x, $\cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ est égal à $2\cos(x)$. »

5) ***Affirmation n°5 :***

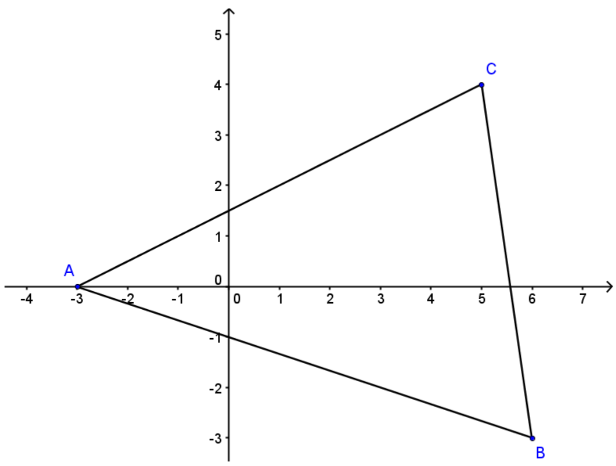
« Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin(x) = ½$ sont tous les nombres qui s'écrivent $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$. »

6) On rappelle que $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et que pour tout réel x, $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

Affirmation n°6 : « $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ »

<u>EXERCICE 4 :</u>

Dans un repère orthonormé, on considère les points A(-3 ;0), B(6 ; -3) et C(5 ; 4).



Partie A

1) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et les longueurs AB et AC.

3) En utilisant une autre expression du produit scalaire, déterminer l'angle $\widehat{BAC}$.

Partie B

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2) Déterminer une équation cartésienne de la droite (d), perpendiculaire à (AB) passant par C.
3) Vérifier, par le calcul, que ces deux droites précédentes se coupent en H(3 ;-2).
4) Montrer que la mesure, en unité d'aire du repère, de l'aire du triangle ABC est un nombre entier.

Partie C

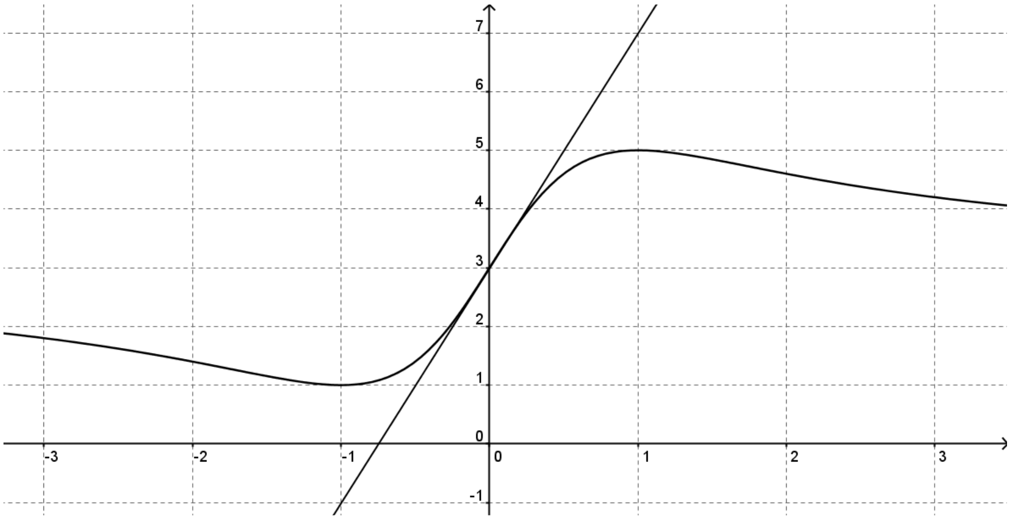
Soit $\mathscr{C}$ le cercle d'équation $x^2 - 4x + y^2 - 21 = 0$.

1) Montrer que $\mathscr{C}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC, c'est-à-dire que les points A, B et C appartiennent $\mathscr{C}$.

2) Déterminer le centre et le rayon de ce cercle.

EXERCICE 5 :

Sur le graphique ci-dessous on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que sa tangente au point A d'abscisse 0.



1) Déterminer graphiquement $f(0)$ et $f'(0)$.

2) On admet qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$.

a) Vérifier que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{-ax^2 + (6 - 2b)x + a}{(x^2 + 1)^2}$

b) En déduire les réels a et b.

3) Dans cette question, on admettra, si besoin, que la fonction f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1}$.

Déterminer, par le calcul, le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 6 :

Une subvention de 116 610 € est octroyée pour la recherche d'une nappe d'eau souterraine repérée par un spécialise du désert.
Une entreprise donne l'estimation suivante du coût de forage : le premier mètre coûte 130 €, le forage du deuxième mètre coûte 52 € de plus que le celui du 1er mètre… Plus généralement, le forage de chaque mètre supplémentaire coûte 52 € de plus que celui du mètre précédent.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note :

u_n le coût en euro de forage somme du nième mètre,

S_n le coût en euro du forage de n mètres.

1) Préciser la nature de la suite (u_n) puis exprimer u_n en fonction de n.
2) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $S_n = 26n^2 + 104n$.
3) Quelle profondeur maximale, en mètre, peut-on forer avec la subvention allouée ?

EXERCICE 7 :

A la naissance de Pierre, sa grand-mère lui ouvre un compte bancaire sur lequel elle dépose 200 € puis, à chaque anniversaire, elle augmente ses versements de 4% (ainsi pour les 1 an de Pierre elle ajoutera 208 € sur son compte).
Personne d'autre n'ajoute d'argent et Pierre ne fait aucun retrait.
On suppose que la banque ne rémunère pas ce compte (taux d'intérêt nul).

Pour tout entier naturel n, on note :

a_n la somme versée par la grand-mère de Pierre à son nième anniversaire ($a_0 = 200$),

S_n la somme totale disponible sur le compte de Pierre à son nième anniversaire.

1) Montrer que (a_n) est une suite géométrique de raison 1,04 puis exprimer a_n en fonction de n.

2) Montrer que pour tout entier naturel n, $S_n = 5000\times\left(1{,}04^{n+1} - 1\right)$

3) Pierre aimerait s'acheter un piano qui coûte 3999 €. Pour savoir quant il pourra se l'offrir, compléter l'algorithme suivant :

```
Variables :  n entier ;  A, S réels

Traitement :  n prend la valeur 0
              a  prend la valeur 200
              S  prend la valeur 200
              Tant que ......................
                   n prend la valeur ...
                   a prend la valeur a × ...
                   S prend la valeur S × ...
              Fin du Tant que

Sortie :  Afficher ...
```

4) En utilisant les résultats de la question 2), modifier l'algorithme de manière à n'utiliser que les seules variables n et S.

5) Programmer un des algorithmes précédents et dire à partir de quel âge Pierre pourra s'acheter le piano.